フェルマー点について

信濃毎日新聞・科学欄「知・究・学」のコラム「時空の旅へ，ようこそ」の 2018 年 8 月 6 日朝刊では，長さの最小値に関するクイズを出題しました．解答編は 8 月 20 日朝刊に掲載しましたが，紙幅の関係上，問 2 のフェルマー点に関する詳細な説明ができませんでしたので，ここに詳解を掲載します．

ちなみに，問 2 は問 1 に比べてかなり難しい問題ですので，以下で説明する証明のやり方にノーヒントで気づけなくても何も気にする必要はありません．大事なことは，すぐに解答を探したりせず，自分の頭でああでもない，こうでもないと悩む時間を持つことです．

面白いことに，シャボン膜の物理的性質に着目すれば，120° に開くことを理解するのはあまり難しくはありません．それは数学的証明ではありませんので，そのとき本当に線の長さの合計が最小になっていると示したことにはなりませんが，直感的に理解しやすいので，それについても書きました．また，こうしたシャボン膜の性質を高次元空間へ拡張したものについても少しだけ触れました．

1　数学を使った考え方

フェルマー点が，3 点 A, B, C と中継点とを結ぶ，3 本の線の合計長さを最小にすることを証明します．

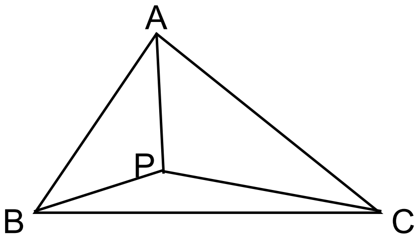

図 1: 三角形 ABC の内部に適当に点 P をとる．

図 1 のように，三角形 ABC の内部に点 P を適当に取ります．知りたいのは，

点 P がどのような点であるときに

$$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP}$$

が最小になるか？

です．この問題も問 1 と同じく,「直線が最短距離である」ということが鍵になります．

知りたいのは AP+BP+CP ですが，この線は直線も何も，1 本の線になっていません．そこで，それを 1 本の線に繋げるため，図 2 のように，辺 AP を一辺とする正三角形 APQ を作ります．

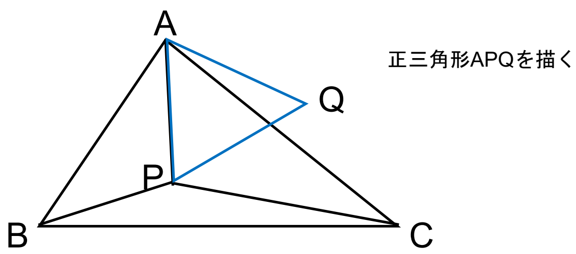

図 2: 辺 AP を一辺とするような，正三角形 APQ を描く．

正三角形なので，辺 AP と辺 PQ の長さは同じです．よって AP + BP と BP + PQ の長さは同じであるため，AP + BP の長さを考える代わりに，折れ線 BP + PQ を考えてもよいことになります．

さらに，図 3 のように，辺 AC を一辺とする正三角形 ACD も描き，QD を線で繋ぎます．

すると，図 4 のように，三角形 APC と三角形 AQD が，全く同じ三角形になっています．[1]

[1]中学以降の数学では,「三角形 APC と三角形 AQD は合同である」といい，それを証明することもできます．なぜ

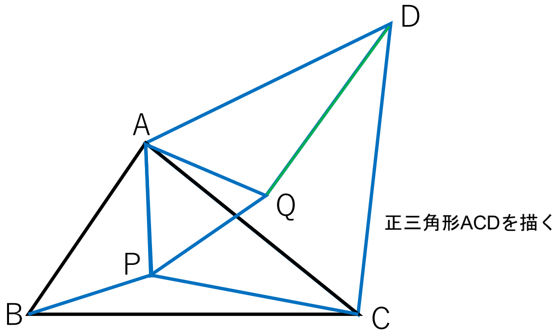

図 3: 辺 AC を一辺とする正三角形 ACD を描き，QD を線で繋ぐ．

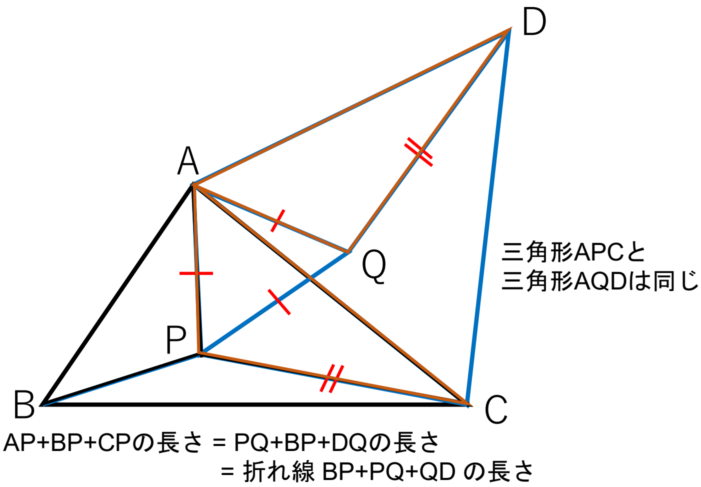

図 4: 三角形 APC と三角形 AQD は同じ三角形であり，AP+BP+CP の長さと，折れ線 BP+PQ+QD の長さは等しくなる．

三角形 APC と三角形 AQD が同じであることから，辺 CP の長さと辺 DQ の長さは同じであることがわかります．すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP}\ \text{の長さ} &= \mathrm{PQ} + \mathrm{BP} + \mathrm{DQ}\ \text{の長さ} \\
&= \mathrm{BP}\ +\ \mathrm{PQ}\ +\ \mathrm{QD}\ \text{の長さ}
\end{aligned}
$$

となっているのです．一般に，BP+PQ+QD は折れ線ですが，この長さは，線分 BD より常に長

なら，二つの三角形は，

- 辺 AP と辺 AQ の長さが同じ（そうなるように，正三角形 APQ を書いた）
- 辺 AC と辺 AD の長さが同じ（そうなるように，正三角形 ACD を書いた）
- 角 PAC と角 QAD が同じ（どちらも，正三角形の内角である 60° から，角 DAQ を除いたものであるため）

であるからです．二つの辺の長さと，その間の角度が等しいため，合同であるとわかります．ちなみに三角形の合同の証明は中学数学の知識であり，小学校で教わる内容を超えています．

小学生の人は，なるべく正確に正三角形を書き，二つの三角形 APC と AQD の長さや角度を比べてみるとよいと思います．

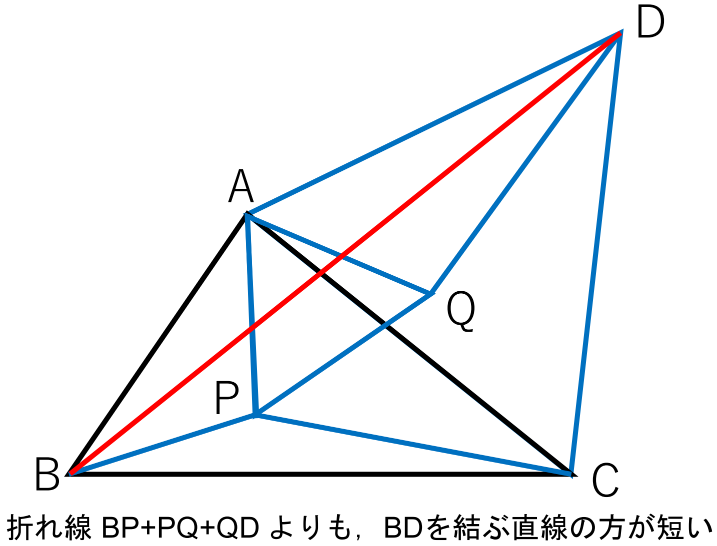

図 5: BP+PQ+QD の長さが最小になるのは，B, P, Q, D が一直線上に並んだとき．

くなります（図 5）．

ということは，B, P, Q, D が一直線上に並べば，そのとき BP+PQ+QD は折れ線ではなくなって直線になり，BP+PQ+QD の長さも最小になります．このときの点 P が，フェルマー点です．なぜなら，BP+PQ+QD の長さと AP+BP+CP の長さは等しいため，B, P, Q, D が一直線上に並んだとき，AP+BP+CP の長さも最小になるからです．そのときの様子を描いたのが図 6 です．

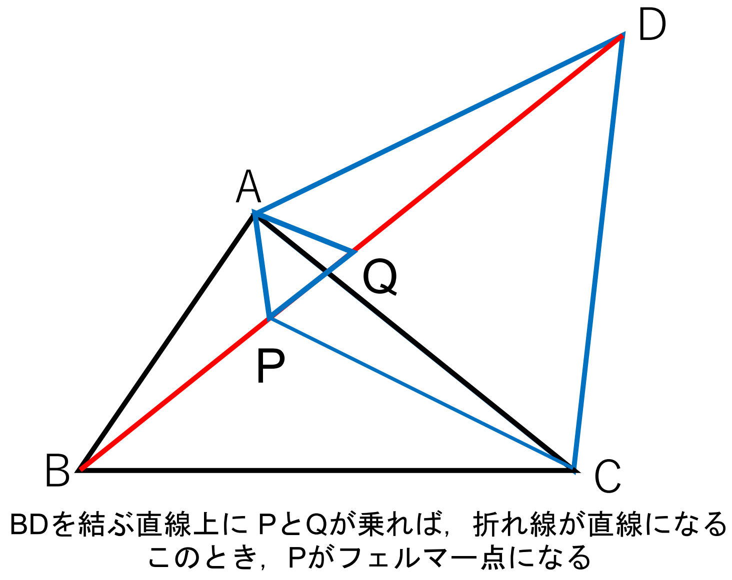

図 6: BD を結ぶ直線に，P と Q が乗るとき，BP+PQ+QD の長さが最小になる．BP+PQ+QD の長さと AP+BP+CP の長さは等しいため，AP+BP+CP の長さもこのとき最小になる．

最後に，このとき 角 APB, 角 BPC，角 CPA が 120° になっていることを確認しましょう．ま

ず，角 APD は正三角形の内角であることから 60° なので，

$$角\ \mathrm{APB} = 120^\circ$$

です．また，先ほど述べたように三角形 APC と三角形 AQD が等しいため，角 APC と角 AQD は同じ角度です．角 AQD は，角 AQP がやはり正三角形の内角であることから 60° なので，

$$角\ \mathrm{APC} = 角\ \mathrm{AQD} = 120^\circ$$

となります．こうして，点 P が AP+BP+CP の長さを最小にするとき，すなわち点 P がフェルマー点であるとき，

$$角\ \mathrm{APB} = 角\ \mathrm{BPC} = 角\ \mathrm{CPA} = 120^\circ$$

となることがわかりました．

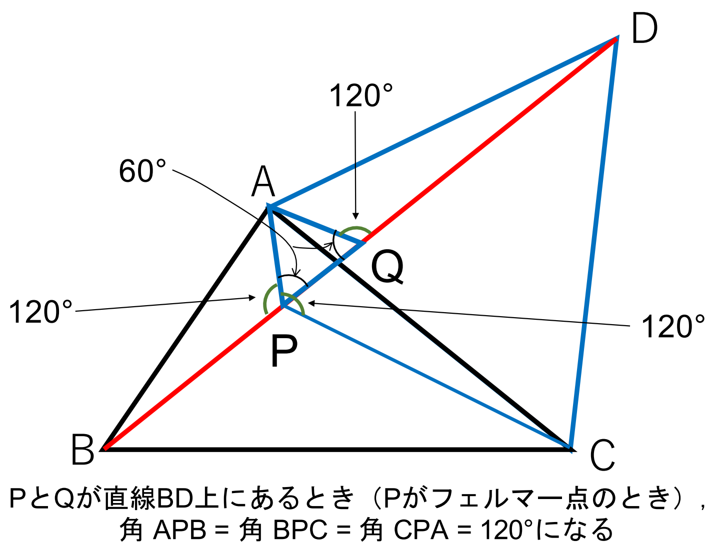

図 7: 点 P がフェルマー点のとき，角 APB = 角 BPC = 角 CPA 120° になる．

2　表面張力のつり合いに注目した考え方

フェルマー点の図形的な性質を一般的に証明したことにはなりませんが，シャボン膜に限れば，その力学的性質から，シャボン膜がそれぞれ 120° が開くことはわかります．

シャボン膜には表面張力があり，膜は小さく縮もうとしています．シャボン膜が落ち着き，動きを止めているとき，あらゆる点において働く力はつり合っています（つり合うまで形を変え続けます．静止しているということは，つり合っている証拠です）．

これはフェルマー点 P でも同様で，点 P を 3 方向へ引っ張っている力もつり合っています．ここで，表面張力は単位面積当たりのエネルギーのことで，素材やその厚みが等しければ，力の大きさは等しくなります．よって点 P の周りで，シャボン膜は 3 方向へ等しい大きさの力で互いに引っ張っています．

等しい大きさの力が 3 方向へ働いているとき，それがつり合うのは図 8 のように，それぞれが 120° に開いているときであることがわかります．

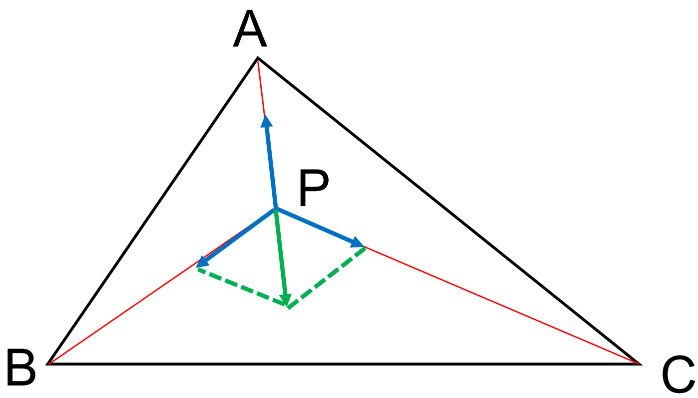

図 8: 点 P に働く，大きさの等しい力がつり合うのは，それぞれ 120° をなす方向に力が加わっているとき．

3　次元を上げると？

高校で学ぶベクトルと三角関数を用いると，立体版のフェルマー点についても考えることができます．

正四面体のフレームを作り，それをシャボン液に浸して膜を作ると，膜が正四面体の内部に張り，その膜が交わる線は，図 9 のようにそれぞれおよそ 109.47° の角度を成して交わります．この角度はマラルディの角と呼ばれています．

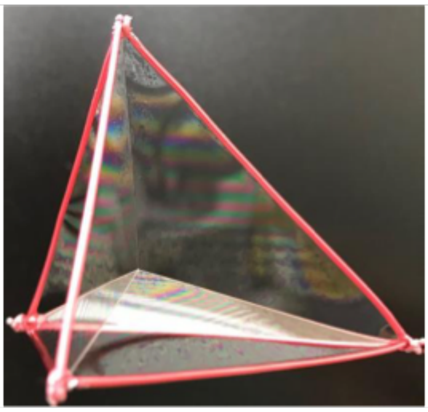

図 9: 正四面体のフレーム内部に張ったシャボン膜の交線は，それぞれおよそ 109.47° をなす．線が交わる点は等角点といい，線同士が交わる角度をマラルディの角という．

実は，この値は

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \fallingdotseq 109.47^\circ$$

を満たす値です.[2]平面の場合，フェルマー点が 120° ずつに開いていましたが，これは

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

を満たします．そう考えてくると，私たちが住む 3 次元空間では絵に描くことができないものの，仮想的に高次元空間が考えれば，正 n 面体のフレームに張るシャボン膜の交線は，

$$\cos\alpha = -\frac{1}{n-1}$$

を満たすような，角 α で交わるのでは？と思えてきます．

これは実際そうで，点の周りで大きさの等しい力がつり合っているという条件をベクトルで表せば示すことができます.[3] 高校数学・物理に慣れている方は，試してみてください．

[2]arccos は cos の逆関数です．すなわち，$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \fallingdotseq 109.47^\circ$ ということは，$\cos 109.47^\circ \fallingdotseq -1/3$ ということです．

[3]ちなみに私の研究室では，こうした高次元図形の性質を，ごく初期の宇宙を知ることに応用する研究をしています．